

## Свойство изотропии в локальной компьютерной геометрии

А.В. Толок<sup>1</sup>, Н.Б. Толок<sup>2</sup>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0002-7257-9029, [tolok\\_61@mail.ru](mailto:tolok_61@mail.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0002-5511-4852, [nat\\_tolok@mail.ru](mailto:nat_tolok@mail.ru)

### Аннотация

В статье рассматривается свойство изотропии в локальной компьютерной геометрии. Демонстрируются основные принципы применения такого свойства в представлении компьютерных данных об области функции на примере функции двух аргументов. Рассматривается применение свойства изотропии в таких областях как алгебраические преобразования, упаковка и кодировка данных. Представлен эффект изотропии в алгебраических преобразованиях на примере произведения двух функций. Проиллюстрирован процесс формообразования области локальных функций поверхности параболоида для описания окружности на основе области локальных функций описания поверхности для квадрата. Анализируется возможность компьютерного представления области локальных функций единственным графическим М-образом.

**Ключевые слова:** Изотропия, локальная компьютерная геометрия, функционально-воксельное моделирование, компьютерная графика, упаковка данных, кодирование.

### Постановка задачи

Цель проведённых исследований заключалась в изучении возможности и способов применения одного из важных свойств локальной компьютерной геометрии – *изотропии локальной функции*, которая является принципиальным отличием этого раздела геометрии от раздела дифференциальной геометрии [1-5] и значительно расширяет круг решаемых прикладных задач локального геометрического моделирования. Основным средством представления информации в локальной компьютерной геометрии [6, 7] являются локальные геометрические характеристики для окрестности точек на заданной области с размерностью  $m$ , описывающие однородный единичный вектор  $\vec{n}$ . Компоненты такого однородного единичного вектора  $(n_1, \dots, n_{m+1})$  определяют локальную функцию  $n_1x_1 + \dots + n_mx_m + n_{m+1} = 0$  в каждой точке области  $X_m$ . Локальная функция, в свою очередь, описывает линейный закон, дублирующий в заданной точке любой другой закон, заданный аналитическим представлением  $F(X_m) = 0$  (рис.1).

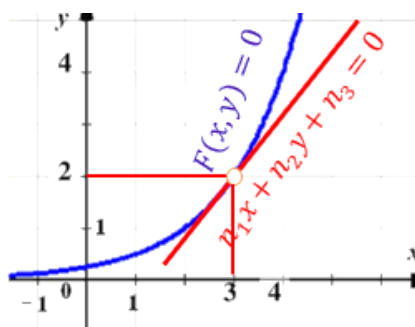


Рис.1. Пример дублирования закона  $F(x)=0$  локальной функцией в точке

Известно, что производная функции в точке касания равна тангенсу угла наклона касательной, а значит, может применяться как линейный закон в этой точке, осуществляя замену закона, заданного исходной функцией. Это свойство приводит к упрощению аналитических расчётов в рассматриваемой точке, что позволило Исааку Ньютону и Готфриду Вильгельму Лейбницу развить теорию дифференциальных и интегральных исчислений. На самом деле, легко показать, что тангенциальное (дифференциальное) исчисление можно отнести к частному случаю исчисления локальной геометрии в целом, а особенно в рассматриваемом случае локальной компьютерной геометрии, поскольку только компьютерные технологии позволили реализовать обработку больших массивов данных для развития такого исчисления.

## 1. Свойство изотропии локальной функции

Для простоты изложения и наглядности рассмотрим принцип изотропии для двумерного случая. Обратимся к рисунку 2 и представим, что локальная функция проходит через точку ортогонально тангенциальному направлению.

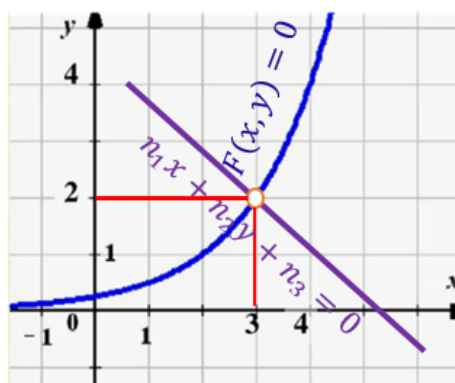


Рис.2. Пример дублирования закона  $F(x, y) = 0$  ортогональной локальной функцией в точке

Можно утверждать, что такая локальная функция так же дублирует закон функции  $F(x, y) = 0$  (или явного вида  $y = f(x)$ ) как и тангенциальная локальная функция, поскольку сохраняется отношение:

$$y = f(x) = -\frac{n_1}{n_2}x - \frac{n_3}{n_2} = -3\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_3}{n_2} = 2. \quad (1)$$

Интересно, что для любых локальных функций, описывающих уравнение прямой, проходящей через выбранную точку, сохраняется свойство дублирования функции  $y = f(x)$ . Можно говорить, что «пучок» локальных функций в отдельно взятой точке может дублировать любую функцию  $y = f(x)$ , проходящую через эту точку. Т.е. для локальной функции в точке наблюдается принцип изотропии: *одинаковость отношения аргументов локальной функции во всех направлениях*.

Покажем на примере функции трёх аргументов  $F(x, y, z) = 0$ , что при любых произвольно заданных компонентах  $n_1, n_2, n_3$  однородного вектора локальной функции всегда можно вычислить четвёртую компоненту  $n_4$ , приводящую к однозначному определению области значений исходной функции  $F(x, y, z) = 0$ .

Рассмотрим пример описания области значений функции для нулевого контура «квадрат». Опишем такую область с помощью средств R-функционального моделирования:

$$z = (1 - x^2) + (1 - y^2) - \sqrt{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2}. \quad (2)$$

Функция (2) обеспечивает нулевое значение по контуру квадрата со стороной в две единицы и центром в начале координат. Для рассмотрения выберем область размером  $4 \times 4$  с центром в начале координат.

Для получения области тангенциальных локальных функций, т.е. области касательных плоскостей, достаточно покрыть заданную область регулярной в плане сеткой. Для задания треугольного элемента плоскости для каждого узла добавим два соседних, сдвинутых по осям  $Ox$  и  $Oy$  на шаг сетки. Для каждого из таких трёх узлов вычислим  $z$  по формуле (2) и сформулируем локальную функцию посредством линейного оператора [6,7]:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0. \quad (3)$$

Приводя компоненты к однородному единичному вектору и соответствию монохромного цвета палитры  $P$  на  $M$ -образе получим:

$$n_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}, \quad M_i = \frac{P(1 + n_i)}{2}, \quad P = 256. \quad (4)$$

На рисунке 3 приведены  $M$ -образы, отображающие на компьютере область всех четырёх характеристик  $n_1, n_2, n_3, n_4$  соответственно.

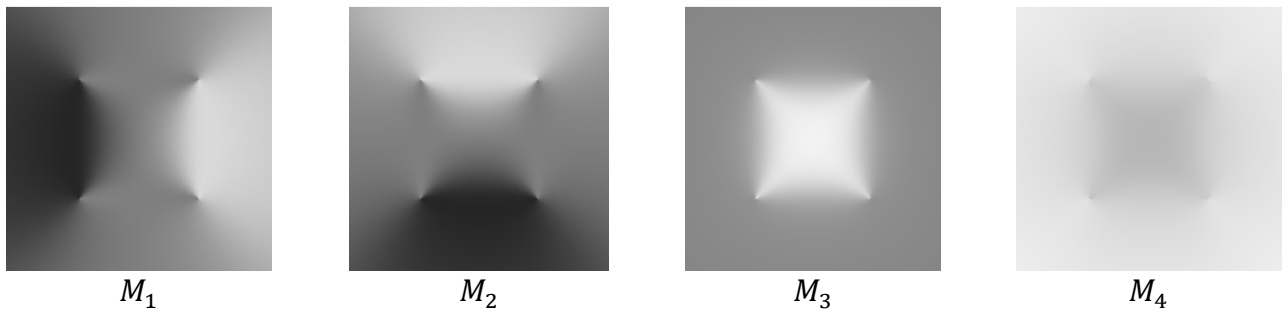


Рис.3.  $M$ -образы, описывающие область тангенциальных локальных функций для нулевого квадратного контура

Рисунок 4 монохромно изображает положительную область значений функции (2), а синим цветом представлена область отрицательных значений этой функции.

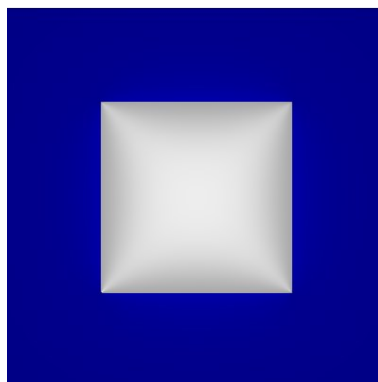


Рис.4. Изображение положительной и отрицательной области значений функции (2), наложенной на изображение  $M_3$

Для начала промоделируем ситуацию, когда в каждой точке локальная функция постоянна и горизонтальна, т.е.  $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$ . При этом, первые два образа -  $M_1$  и  $M_2$  - принимают соответствующий нулевому значению серый цвет, а образ  $M_3$  -

белый цвет, соответствующий единичному значению. Остаётся определить четвёртый образ  $M_4$ , несущий основную информацию о функции (2). Для этого в текущей  $i$ -той точке с координатами  $(x_i, y_i)$  вычисляем  $z_i$  по формуле (2) и находим коэффициент  $a_4$ :

$$a_4 = -a_1x_i - a_2y_i - a_3z_i. \quad (5)$$

Приведем полученные компоненты  $a_i$  к компонентам однородного единичного вектора  $n_i$ , а затем – к соответствию монохромного цвета палитры  $P$  по формуле (4), получим М-образы, показанные на рисунке 5.

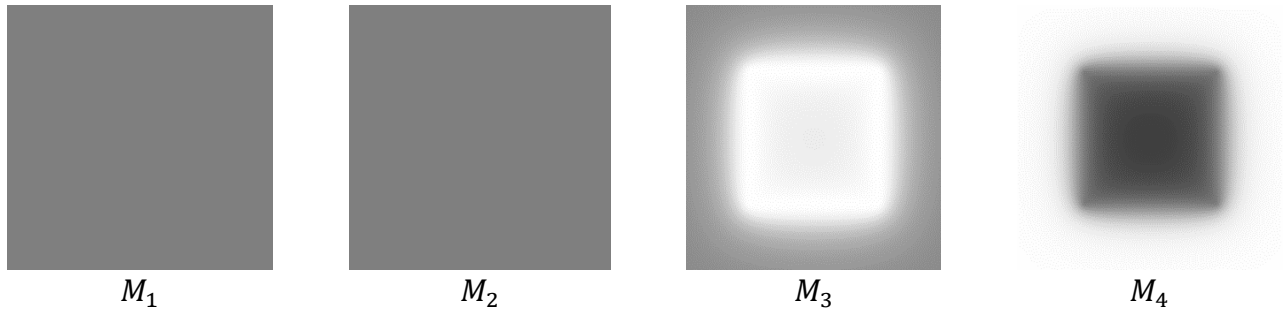


Рис.5. М-образы, описывающие область локальных функций для нулевого квадратного контура по последнему компоненту  $a_4$  при  $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$ .

Первые два М-образа сохраняют постоянство цвета равного значению 127 (серый) для нулевого значения косинуса отклонения от осей  $Ox$  и  $Oy$ , полученного после нормирования. Третий М-образ  $M_3$  в ходе нормирования оказывается под влиянием значений нормы, поскольку числитель в этом случае не равен нулю как в двух первых случаях.

Рассмотрим значение  $z$  в каждой точке заданной области с помощью локальной функции по формуле

$$z_i = -\frac{n_1}{n_3}x_i - \frac{n_2}{n_3}y_i - \frac{n_4}{n_3}. \quad (6)$$

Выделим синим цветом область отрицательных значений  $z_i$ , убедившись, что она совпадает с рисунком 4 (рис. 6).

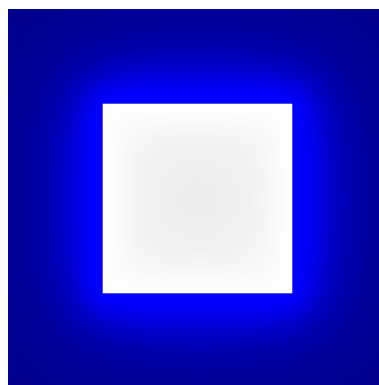


Рис.6. Изображение положительной и отрицательной области значений  $z$  локальных функций

Ориентация плоскостей, описываемых локальными функциями, ортогональных осей  $Oy$  и  $Ox$  соответственно, представлена на рисунках 7 и 8. Здесь мы наблюдаем влияние компоненты  $a_4$  на цвет М-образа соответствующей компоненты  $a_i$ , равной единице.

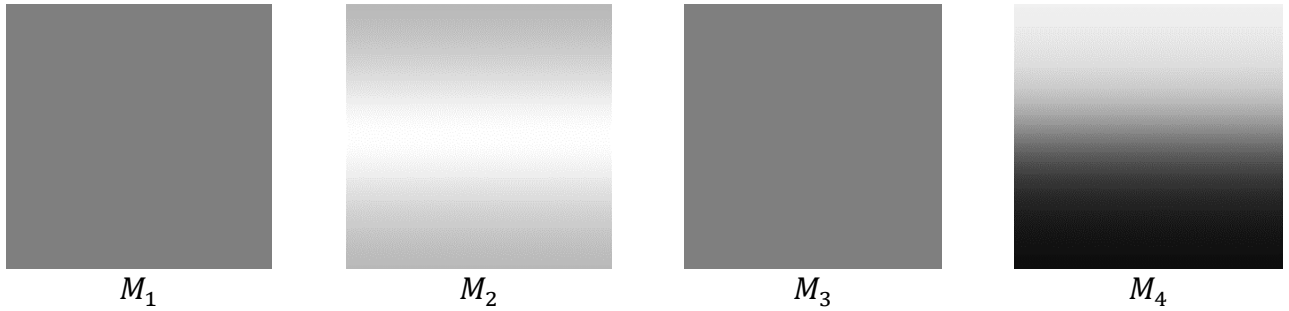


Рис.7. М-образы, описывающие область локальных функций для нулевого квадратного контура по последнему компоненту  $a_4$  при  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0$ .

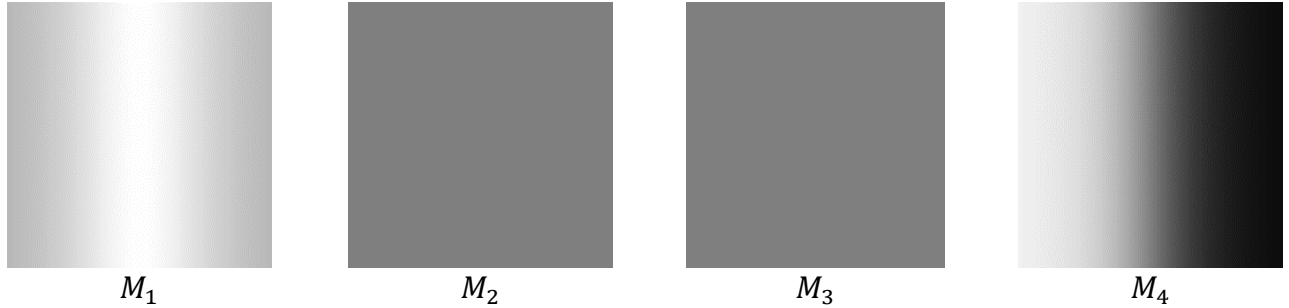


Рис.8. М-образы, описывающие область локальных функций для нулевого квадратного контура по последнему компоненту  $a_4$  при  $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$ .

## 2. Приведение компьютерного представления области функции к одному М-образу с элементом шифрования по цифровому ключу

Проведенные исследования показали, что разработанный подход позволяет при заведомо известных компонентах  $a_1, a_2, a_3$ , выраженных константами, использовать единственный образ  $M_4$  для получения области локальных функций, описывающих область функции (2), посредством предлагаемого алгоритма шифрования по ключу. Идея заключается в использовании процедуры замены целого образа с одинаковым цветом в каждой точке одним числовым значением. Так, например, в рассматриваемом случае на рисунке 5 М-образы  $M_1, M_2$  и  $M_3$  могут быть представлены числами 0,0,1, а рисунки 7 и 8 содержат в представленных М-образах числовые комбинации 0,1, 0 и 1,0,0. Таким образом, для любой из выбранных комбинаций с имеющимися значениями  $a_1, a_2$  и  $a_3$  достаточно в каждой точке соответствующего образа  $M_4$  вычислить значение  $a_4$ . В этом случае комбинация  $a_1, a_2$  и  $a_3$  является ключевой для выбора одного из рассматриваемых трёх образов  $M_4$ . Рассмотрим алгоритм расчёта  $a_4$ .

Зная, что значение  $n_4$  в точке образа  $M_4$ , определяется по формуле

$$n_4 = \frac{2M_4 - 256}{256} \quad (7)$$

При значениях компонент  $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$ , можно выразить  $a_4$  из формулы (4). В рассматриваемом случае

$$n_4 = \frac{a_4}{\sqrt{1 + a_4^2}} \quad (8)$$

В результате получим:

$$a_4 = \frac{n_4}{\sqrt{1 - n_4^2}} \quad (9)$$

Отсюда следует, что каждый из трех М-образов  $M_4$  на рисунках 5, 7, 8, в совокупности со своим числовым ключом, содержит достаточную исходную графическую информацию для получения одной и той же области функции (2). А это значит, что при

наличии любого из таких М-образов в комбинации с числовым ключом, можно полностью восстановить ФВ-модель, представленную на рисунке 3. Отметим также, что при увеличении размерности рассматриваемой области аргументов функции будет лишь увеличиваться количество нулевых компонентов, а значит формула (9) остаётся универсальной, при этом наращивается только индекс при  $a_i$  и  $n_i$ .

Теперь усложним задачу, присваивая любые целочисленные значения трём константам (например,  $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 1$ ). По формуле (5) получим значение  $a_4$  (рис.9).

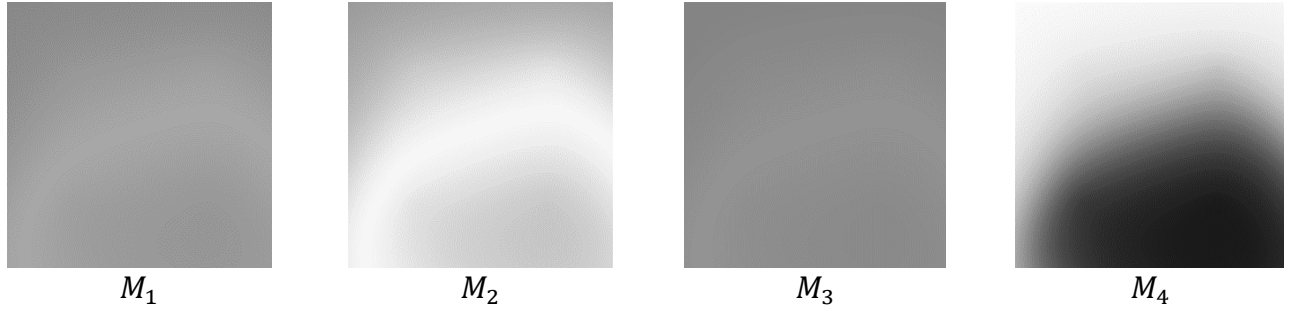


Рис.9. М-образы, описывающие область функции (2) при  $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 1$

Попробуем снова выразить  $a_4$  учитывая, что все три компоненты  $a_1, a_2, a_3$  являются некоторыми числовыми значениями отличными от нуля. Тогда

$$n_4 = \frac{a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}, \quad (10)$$

что приводит нас к тому, что

$$a_4 = n_4 \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{1 - n_4^2}}, \quad (11)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  – сложный числовой ключ к кодировке М-образа  $M_4$ .

Рисунок 10 изображает результат вычисления отрицательной и положительной области значений  $z$  для локальных функций, составленных М-образами рисунка 9.

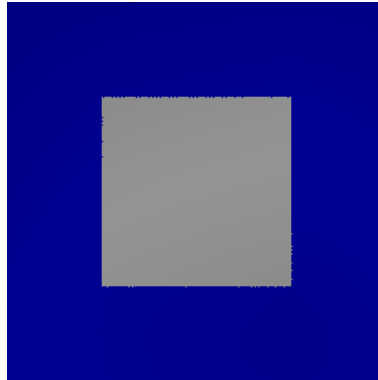


Рис.10. Изображение положительной (серой) и отрицательной (синей) области значений  $z$  локальных функций с ключом 2,6,1.

Не сложно показать, что любые три М-образа из набора функционально-воксельной модели, заменённые константами значений, позволяют получить один из М-образов для описания области функции.

### 3. Применение свойства изотропии в вычислительных действиях над однородными векторами

В работах [6,7,8] рассматриваются вычислительные действия над локальными функциями с применением М-образного представления заданной области. Характерный пример проявления изотропии встречается при получении результата покомпонентного умножения значений двух разных функций, представленных однородными векторами в точках заданной области.

В качестве рассматриваемого примера выбраны разнотипные функции: тригонометрическая (рис.11)  $f$ -функция

$$z^f = 5(y \sin \pi x + x^2 \cos \pi y) \quad (12)$$

и экспоненциальная (рис.12)  $g$ -функция

$$z^g = (x - 1)e^{-[x^2 + (y+1)^2]} + 10(0,2x - x^3 - y^5)e^{-(x^2 + y^2)} + e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{3}}. \quad (13)$$

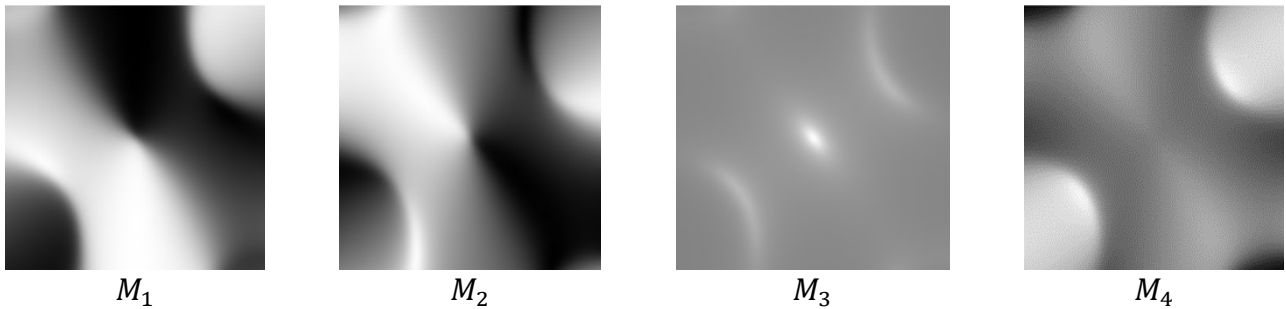


Рис.11. М-образы, описывающие область локальных функций тригонометрической функции (12)

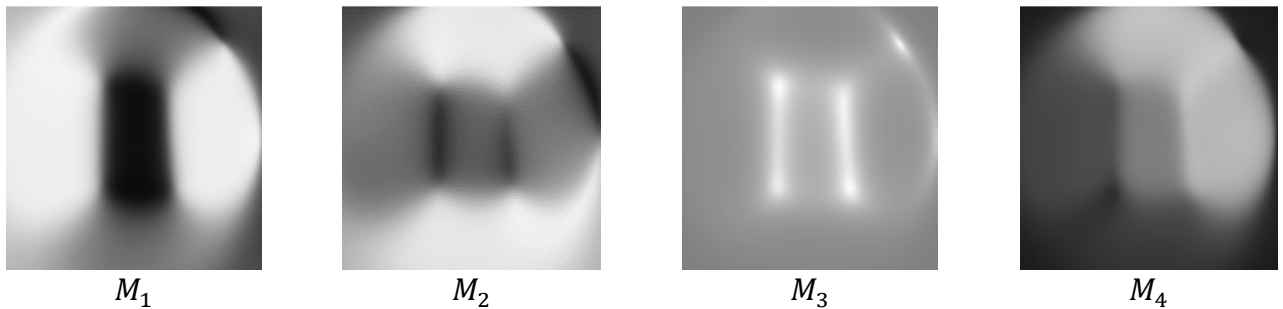


Рис.12. М-образы, описывающие область локальных функций экспоненциальной функции (13)

Эталоном сравнения результатов выступает область локальных функций, полученная непосредственно произведением функций (12) и (13), показанная на рисунке 13.

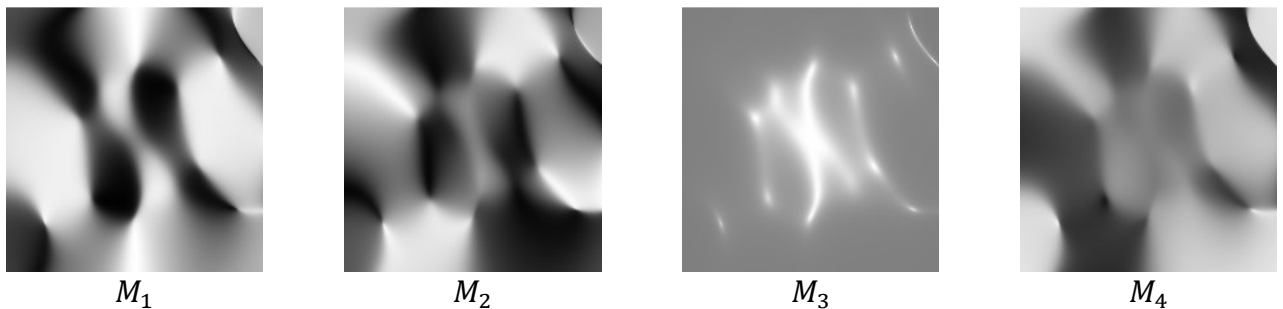


Рис.13. М-образы, описывающие область локальных функций произведения значений функций (12) и (13)



В работах [6,7,8] решение задачи произведения на основе локальных функций однородного вектора предлагается выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}
z^{fg} &= \left( -\frac{n_1^f}{n_3^f}x - \frac{n_2^f}{n_3^f}y - \frac{n_4^f}{n_3^f} \right) \times \left( -\frac{n_1^g}{n_3^g}x - \frac{n_2^g}{n_3^g}y - \frac{n_4^g}{n_3^g} \right), \\
z^{fg} &= \left( -\frac{n_1^f}{n_3^f}x - \frac{n_2^f}{n_3^f}y - \frac{n_4^f}{n_3^f} \right) \times z^g, \\
n_1^{fg} &= n_1^f z^g, n_2^{fg} = n_2^f z^g, n_3^{fg} = n_3^f, n_4^{fg} = n_4^f z^g, \\
z^{fg} &= -\frac{n_1^{fg}}{n_3^{fg}}x - \frac{n_2^{fg}}{n_3^{fg}}y - \frac{n_4^{fg}}{n_3^{fg}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Если рисунок 13 демонстрирует тангенциальные локальные функции, полученные путем линейной аппроксимации по формулам (3) и (4), то результат расчётов по формуле (14) не является тангенциальным (рис.13), но  $z^{fg}$ -поверхность у них имеет отличие в 14 знаке после запятой в каждой рассматриваемой точке области.

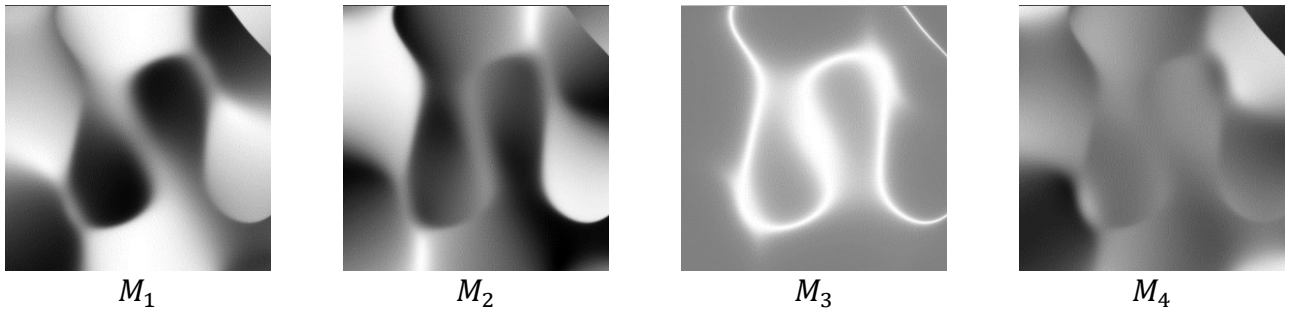


Рис.14. М-образы, описывающие область локальных функций по формуле (14)

Понятно, что существует другое решение, позволяющее выразить компоненты:

$$\begin{aligned}
z^{fg} &= \left( -\frac{n_1^f}{n_3^f}x - \frac{n_2^f}{n_3^f}y - \frac{n_4^f}{n_3^f} \right) \times \left( -\frac{n_1^g}{n_3^g}x - \frac{n_2^g}{n_3^g}y - \frac{n_4^g}{n_3^g} \right), \\
z^{fg} &= z^f \times \left( -\frac{n_1^g}{n_3^g}x - \frac{n_2^g}{n_3^g}y - \frac{n_4^g}{n_3^g} \right), \\
n_1^{fg} &= n_1^g z^f, n_2^{fg} = n_2^g z^f, n_3^{fg} = n_3^g, n_4^{fg} = n_4^g z^f, \\
z^{fg} &= -\frac{n_1^{fg}}{n_3^{fg}}x - \frac{n_2^{fg}}{n_3^{fg}}y - \frac{n_4^{fg}}{n_3^{fg}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

При этом М-образы покажут соответственно другую картину (рис.15), однако  $z^{fg}$ -поверхность полностью совпадает с предыдущими рассмотренными случаями.

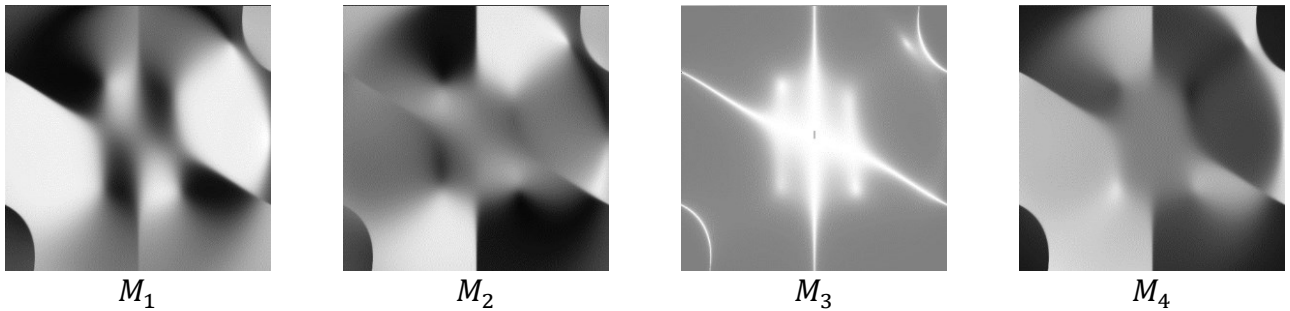


Рис.15. М-образы, описывающие область локальных функций по формуле (15)

Таким образом, в силу существования свойства изотропии в арифметических действиях локальной геометрии сохраняется свойство коммутативности умножения.



## 4. Переход к тангенциальной локальной функции

Возникает вопрос: возможно ли из любого М-образного представления функции получить тангенциальные локальные функции?

Рассмотрим пример получения из образа  $M_4$  рисунка 9 М-образов рисунка 3. Для этого преобразуем значение цвета текущей точки  $M_4$  в значение четвёртой компоненты однородного единичного вектора  $n_4$  выражением (6) и выразим компоненту  $a_4$  через известные условия, что  $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 1$ :

$$n_4 = \frac{2M_4 - P}{P}, \quad a_4 = n_4 \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{1 - n_4^2}} = n_4 \frac{\sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2}}{\sqrt{1 - n_4^2}} = n_4 \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{1 - n_4^2}}. \quad (16)$$

Выражение цветовой градации по формуле (4) приводит к восстановлению всех четырёх М-образов рисунка 9:

$$n_1 = \frac{2}{\sqrt{41 + a_4^2}}, n_2 = \frac{6}{\sqrt{41 + a_4^2}}, n_3 = \frac{1}{\sqrt{41 + a_4^2}}, n_4 = \frac{a_4}{\sqrt{41 + a_4^2}}, \quad (17)$$

$$M_i = \frac{P(1 + n_i)}{2}, \quad P = 256.$$

Полученное М-образное представление обеспечивает в соответствующих точках области  $z$ -значение функции (2):

$$z = -\frac{n_1}{n_3}x - \frac{n_2}{n_3}y - \frac{n_4}{n_3}. \quad (18)$$

Далее, при имеющемся дискретном состоянии точек М-образов несложно представить линейную аппроксимацию области функции, восстановив упорядоченные тройки узлов прямоугольной сетки, приводя к расчётам по формулам (3) и (4).

## Выводы

Проведённые исследования показали широкие возможности вычислительных средств и форм представления многомерной области сложной функции на компьютере с применением к описанию отдельно взятой точки пространства компонентами однородного вектора. Выявленное свойство изотропии значительно расширяет способы такого представления и позволяет упаковывать компьютерную информацию в единственном М-образе, приводя остальные к константному значению, что приводит к задачам графического шифрования геометрии объекта. Показано, что свойство изотропии упрощает реализацию автоматизации алгебраических и арифметических вычислений над функциями, что позволяет реализовывать на уровне локальных функций сложных вычислительных конструкций, таких как R-функции [6] и т.п. Показан способ перехода к традиционному тангенциальному положению локальных функций для выполнения дифференциальных и интегральных исчислений [9-11].

## Благодарности

*Исследование выполнено в рамках научной программы национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».*

## Список литературы

1. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.
2. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 344 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 472 с.

4. Конев В.В. Уравнения в частных производных: Учебное пособие / В.В. Конев; Томский политехнический университет. – Режим доступа: <https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/notes/Partial.pdf>.
5. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. стереотип. М.: ЛЕНАНД, 2019. – 256 с. (Вся высшая математика в задачах.)
6. Толок А.В. Локальная компьютерная геометрия. Учебное пособие. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 147 с.
7. Толок А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. М.: Физматлит, 2016. – 112 с.
8. Alexey Tolok, Natalya Tolok. Arithmetic in Functional-Voxel Modeling (2022). Научная визуализация 14.3: 107 - 121, DOI: 10.26583/sv.14.3.08
9. Толок А.В., Толок Н.Б. Дифференцирование и интегрирование в функционально-воксельном моделировании // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 60-67.
10. Толок А.В., Толок Н.Б. Применение функционально-воксельного метода для решения линейного уравнения в частных производных первого порядка с заданными начальными условиями // Проблемы управления. 2023. № 6. С. 76-83.
11. А.В. Толок, Н.Б. Толок. Функционально-воксельное моделирование задачи Коши (2024). Научная визуализация 16.1: 105 - 111, DOI: 10.26583/sv.16.1.09

# Isotropy in Local Computer Geometry

A.V. Tolok<sup>1</sup>, N.B. Tolok<sup>2</sup>

V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0002-7257-9029, [tolok\\_61@mail.ru](mailto:tolok_61@mail.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0002-5511-4852, [nat\\_tolok@mail.ru](mailto:nat_tolok@mail.ru)

## Abstract

The article discusses the property of isotropy in local computer geometry. The basic principles of applying such a property in the representation of computer data about the domain of a function are demonstrated using the example of a function of two arguments. The scope of application of the isotropic property in algebraic transformations, data packing and encoding is considered. The effect of isotropy in algebraic transformations is given using the example of the product of two functions. The formation of the domain of local functions of the paraboloid surface for describing a circle is illustrated on the basis of the domain of local functions for describing the surface for a square. The possibility of computer representation of the domain of local functions by a single graphical M-image is analyzed.

**Keywords:** Isotropy, local computer geometry, Functional voxel modeling, M-image, computer graphics, data packing, encoding.

## References

1. Egorov A.I. Ordinary differential equations with applications. Fizmatlit, Moscow, 2003. 384 pp.
2. Romanko V.K. Differential equations and the calculus of variations. Moscow: Laboratory of Basic Knowledge, 2000. 344 pp.
3. Stepanov V.V. The Course in Differential Equations. M.: Editorial URSS, 2004. 472 pp.
4. Konev V.V. Partial differential equations: Study guide / Tomsk Polytechnic University.: <https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/notes/Partial.pdf>.
5. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. Ordinary differential equations: Problems and examples with detailed solutions: Study guide. Moscow: LENAND, 2019. – 256 pp. (Higher mathematics in problems and exercises)
6. Tolok A.V. (2022) Local computer geometry. Study guide. IPR Media, Moscow– 147 pp.
7. Tolok, A.V. (2016) Functional Voxel Method in Computer Modeling. Fizmatlit, Moscow – 112 pp.
8. Alexey Tolok, Natalya Tolok. Arithmetic in Functional-Voxel Modeling (2022). Scientific Visualization 14.3: 107 - 121, DOI: [10.26583/sv.14.3.08](https://doi.org/10.26583/sv.14.3.08)
9. Tolok A.V., Tolok N.B. Differentiation and Integration in Functional Voxel Modeling // CONTROL SCIENCES. 2022. № 5. P. 51-57.
10. Tolok A.V., Tolok N.B. The Functional Voxel Method Applied To Solving a Linear First-Order Partial Differential Equation with Given Initial Conditions // CONTROL SCIENCES. 2023. № 6. P. 65-71.
11. A.V. Tolok, N.B. Tolok. Functional-Voxel Modeling of The Cauchy Problem (2024). Scientific Visualization, 2024, v. 16, N 1, p. 105 - 111, DOI: [10.26583/sv.16.1.09](https://doi.org/10.26583/sv.16.1.09)